

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE CONTABILIDADE E ATUÁRIA

ALBERT KENJI MIYAGI MATAYOSHI

**Comparação entre a aplicação dos modelos de Black-Scholes e Atuarial
precificação de opções do tipo europeia utilizando dados da bolsa brasileira**

São Paulo

2021

ALBERT KENJI MIYAGI MATAYOSHI

**Comparação entre a aplicação dos modelos de Black-Scholes e Atuarial
precificação de opções do tipo europeia utilizando dados da bolsa brasileira**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, para obtenção do diploma em Ciências Atuariais.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Jurandir Simões de Araujo

São Paulo

2021

Comparação entre a aplicação dos modelos de Black-Scholes e Atuarial precificação de opções do tipo europeia utilizando dados da bolsa brasileira

Resumo

O presente estudo verificou, o ajustamento ao mercado brasileiro de dois modelos de precificação de opções do tipo europeia: o de Black e Scholes (1973), que reconhece que os retornos dos preços das ações seguem um processo de difusão log-normal e o proposto por Rydberg e Bladt (1998) que segue um processo probabilístico e atuarial baseado ao usado em métodos de precificação de apólices de seguro. Para os dois modelos foram utilizados dados de empresas da bolsa de valores brasileira. Os resultados numéricos dos dois modelos foram comparados ao preço praticado em mercado. Ao final é mostrado que o modelo Atuarial se ajusta melhor a opções de compra e o modelo de Black-Scholes a opções de venda com diferentes filtros de comparação; porém os modelos se comportam de maneira semelhante quanto mais próximos da maturação da opção.

Palavras-chave: opções europeias; mercado financeiro; atuária; derivativos; precificação

1. Introdução

O mercado de instrumentos derivativos surgiu inicialmente para amenizar a variação de preços principalmente em épocas de crise, como no caso de commodities, moedas, ações, títulos públicos; posteriormente os agentes econômicos começaram a elaborar planos para ganhos financeiros na diferença de preços. Atualmente são oferecidos variados produtos para que seguradoras, instituições financeiras, entidades de previdência realizem suas estratégias de gerenciamento de risco e hedge. São classificados em contrato futuro, contrato a termo, swap e opções, e cada uma conta com sua forma particular de operação.

No caso particular das opções é permitido a negociação de compra ou venda de um determinado ativo em uma data futura a um preço fixo. Como temos um risco no nosso investimento, precificá-lo da melhor maneira é essencial para a efetividade da estratégia a ser adotada pela companhia; portanto, é essencial ao investidor dominar as técnicas e os fatores que influenciam o comportamento do investimento realizado. Para que os negociadores de derivativos possam atingir os objetivos que se propõem – proteção, especulação ou arbitragem - uma correta precificação demonstra ser relevante, porque, do contrário, pode-se estar pagando um preço não justo pela opção, aumentando ou reduzindo o custo da proteção ou da alavancagem de um portfólio.

Um problema comum no mercado de opções é que como o preço do ativo é fixado em uma data futura, é problemático operar neste tipo de mercado devido a possíveis eventualidades que possam ocorrer no futuro. Em operações que não tenham sido previamente bem estruturadas podem acarretar prejuízos, ou em casos extremos a falência da companhia.

Por exemplo, ao usar derivativos em seu portfólio uma seguradora pode proteger-se do risco de subscrição, que segundo o Conselho Nacional de Seguros Privados (CNSP) é referido como: *“a possibilidade de ocorrência de perdas que contrariem as expectativas da supervisionada, associadas, diretamente ou indiretamente, às bases técnicas utilizadas para cálculo de prêmios, contribuições, quotas e provisões técnicas”* ou seja, a companhia pode-se utilizar deste recurso para reduzir a variação dos seus fluxos de caixa e consequentemente a

sua probabilidade de insolvência; outra vantagem é que a utilização de um contrato padronizado resulta em um aumento de sua liquidez. Ao usar opções sobre futuros, a seguradora pode se proteger contra perdas enquanto retém a maior parte de seu potencial de valorização. Isso é semelhante em carteiras de investimento ao uso de opções de ações para criar uma carteira de *hedge*.

Por serem derivativos, as opções sobre ações dependem do comportamento do ativo-objeto para que possam ser precificadas. Partindo de premissas sobre os processos de formação dos preços da ação, diferentes modelos de precificação de ações foram desenvolvidos. Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton chegaram a principal fórmula e pioneira para a precificação de opções, amplamente utilizada no mercado financeiro e conhecida como modelo de Black e Scholes (1973). Ao longo do tempo surgiram modelos alternativos a abordagem de Black-Scholes como o modelo de árvore binomial de Ross et al. (1979), e o modelo de volatilidade condicional Duan (1995).

Rydberg e Bladt (1998) foram os primeiros a adotar uma abordagem atuarial para resolver o problema de precificação em opções. Como a atuária habitualmente usa modelos matemáticos para analisar riscos é natural que haja uma ampliação do uso das mesmas ideias para outros campos, como a área de finanças. A ideia central utilizada pelos pesquisadores, que é distinta da teoria financeira tradicional, é usar um conceito utilizado no cálculo do prêmio justo de seguros, que segundo os pesquisadores: *“é descontar a valor presente preços futuros livres de risco, de acordo com sua taxa de retorno esperada. Com estes preços descontados a valores presentes podemos calcular o preço de uma opção de compra como o valor esperado da diferença entre o preço real e o preço de exercício no momento do exercício.”*

O objetivo principal do trabalho é o de comparar o modelo de Black e Scholes com o modelo atuarial de Rydberg e Bladt para precificação de opções do tipo europeia utilizando dados de empresas da bolsa de valores brasileira (B3) e analisar a aplicabilidade desse modelo e sua precisão. A posse de maior conhecimento do modelo de precificação de opções, que expresse mais claramente o comportamento das opções negociadas no mercado brasileiro, pode auxiliar os agentes econômicos na tomada de decisão e contribuir para a eficiência do mercado, evitando a obtenção de retornos anormais por parte dos agentes econômicos. Outro ponto a ser analisado é ver as eventuais potencialidades e limitações dos dois modelos.

O trabalho foi organizado da seguinte forma: na seção 2 a apresentação dos conceitos teóricos que darão respaldo ao tema estudado. Na seção 3 o esclarecimento dos procedimentos metodológicos utilizados para organizar e analisar as informações coletadas seguidos da aplicação dos modelos a serem utilizados. Na seção 4 é apresentado os resultados e por fim, na seção 5 as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2. Fundamentação Teórica

2.1 Funcionamento do mercado de opções

De acordo com Hull (2006) as opções são contratos que dão ao seu comprador o direito de comprar ou vender um ativo, por um preço determinado até uma certa data. Elas podem ser de dois tipos: opção de compra (*call*) e opção de venda (*put*). As opções de compra dão ao seu comprador o direito de comprar o ativo por certo preço até uma data futura e as opções de venda dão ao seu comprador o direito de vender o ativo por um certo preço até uma

data futura. Uma opção do tipo americana pode ser exercida a qualquer momento a partir de sua compra, enquanto uma opção do tipo europeia só pode ser exercida na data de vencimento. O titular da opção não tem a obrigação de exercer o seu direito de compra ou venda, e só o fará se for favorável, porém há custos implícitos para se adquirir uma opção.

No mercado de opções os principais termos utilizados pelo mercado são: 1) O prêmio: que é o montante pago pelo contrato. 2) O ativo-objeto: que é o instrumento financeiro do qual o valor da opção depende, que pode ser uma ação, commodities, moedas, juros. 3) O preço de exercício ou strike: que é o preço pelo qual o ativo objeto poderá ser comprado pelo titular no caso de uma call ou vendido no caso de uma put. 4) A data de vencimento ou data de expiração/maturidade, que é a data a partir da qual a opção deixa de existir. 5) O valor intrínseco: que equivale ao resultado financeiro obtido, pelo exercício da opção em um determinado momento. 6) O valor extrínseco que equivale a parcela do prêmio da opção que excede o seu valor intrínseco.

Existe também a classificação de opções quanto à relação entre o preço de exercício e o preço do ativo subjacente no mercado à vista, conhecida como *moneyness*. Na negociação de uma opção o investidor deve ter o conhecimento do preço de exercício de uma opção e o seu respectivo preço no mercado à vista para assim ter uma ideia da estratégia a ser utilizada. Uma opção *in the money* (ITM): é uma opção que possui um valor intrínseco, ou seja, uma call com preço de exercício inferior ao preço do ativo objeto ou uma put com preço de exercício superior ao preço do ativo objeto. A opção *at the money* (ATM) é uma opção que possui preço de exercício próximo ao preço do ativo objeto. Enquanto a opção *out the money* (OTM) é uma opção que possui valor intrínseco igual ou próximo de zero.

Os fatores que afetam o preço de uma opção são o preço atual do ativo objeto; o tempo de vencimento do contrato; a volatilidade do ativo objeto, equivale a uma medida que mede a incerteza quanto a oscilação do valor futuro do ativo; o preço de exercício do ativo; a taxa livre de juros praticada no mercado durante a vida da opção e os dividendos pagos esperados.

Para uma opção do tipo europeia é válida a paridade *put-call* que demonstra que o valor de uma opção de compra europeia com um determinado preço de exercício e data de exercício pode ser deduzido a partir do valor de uma opção de venda europeia com os mesmos preço e data de exercício, e vice-versa.

No Brasil as opções são negociadas na B3 e possuem a padronização da margem de cobertura e a data de vencimento dos contratos, temos custos adicionais como: corretagem, emolumentos, liquidação, registro e taxa de custódia. Existem opções no mercado à vista como as opções de ações, de índice do Ibovespa, de moedas e ouro. No mercado futuro, existem opções sobre futuros de commodities – como açúcar, algodão, boi gordo, soja e café. Além disso, existem as opções de séries padronizadas e as opções flexíveis que permitem as partes envolvidas na negociação definirem data, preço de exercício e qualidade da mercadoria diferente das séries padronizadas.

O vencimento dos contratos de opções sobre ações até o mês de abril de 2021 ocorria na terceira segunda-feira de cada mês, dia em que ocorre o exercício; porém em maio de 2021 a data limite é a partir da terceira sexta-feira do mês de vencimento, mudança que foi realizada para casar-se com a data do mercado internacional. A negociação das opções só pode ser feita até o dia útil anterior ao vencimento.

O código de uma opção sobre ação é formado por uma combinação de cinco letras e dois números, sendo que: As quatro letras iniciais indicam qual é o código da empresa listada na bolsa de valores. Assim, o código de uma opção de ações da Magazine Luiza começa com as letras MGLU. As letras seguintes indicam se a opção é de compra ou de venda, além do mês do seu vencimento. As letras de A a L são usadas para identificar uma opção de compra, sendo que A demonstra que o vencimento é em janeiro, B em fevereiro e assim por diante. Já letras de M a X representam opções de venda, com M sendo vencimento em janeiro, N em fevereiro etc. E os números representam o preço de exercício da opção. Exemplificando, MGLUG12 representa uma opção de compra da Magazine Luiza com vencimento em julho e preço de exercício de R\$ 12,00, data na qual o titular terá o direito de compra da ação.

Os modelos de precificação são um conjunto de equações matemáticas que visam calcular o preço justo de um instrumento financeiro em um determinado cenário. A seguir são apresentados os modelos utilizados na formulação do trabalho.

2.2 Modelo de Black-Scholes

Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton introduziram o primeiro modelo prático para a precificação de opções conhecido como modelo de Black-Scholes sendo o mais utilizado nesse tipo de contrato. Sua popularidade se deve a sua relativa simplicidade e ao número reduzido de variáveis e parâmetros utilizados para a sua realização. Este modelo foi um dos responsáveis pelo aumento significativo na negociação de opções, a partir dos anos 70. Antes da descoberta desse modelo, os operadores do mercado financeiro não usavam um conjunto de equações matemáticas robustas para avaliar as opções, e a posterior análise empírica mostrou que as estimativas de preço produzidas por essa fórmula estão próximas dos preços observados; tal importância e influência foram reconhecidas com o Prêmio Nobel de Economia em 1997 para os pesquisadores.

Este modelo admite que o preço das ações segue um processo de difusão log-normal, com variância constante dos retornos ao longo do tempo, o que significa que o preço das ações segue movimentos aleatórios. Apesar de exigir a estimativa de apenas um único parâmetro, a volatilidade, foram observadas tendências em sua utilização, com relação ao preço de exercício, ao prazo para o vencimento da opção e, principalmente, à volatilidade da ação-objeto.

Inicialmente os autores abordaram a precificação de opções call e put do tipo europeu e posteriormente ampliaram o seu uso para as opções do tipo americano. O modelo tem como premissas:

- O preço da ação ou subjacente segue um movimento browniano geométrico (Processo de Wiener) - é um caso particular do processo de Markov referente a um processo estocástico onde somente o valor atual da variável é relevante para prever a evolução futura do processo. Este considera que a única informação necessária para determinar o estado futuro é o estado atual, em que a distribuição os preços são normalmente distribuídos com uma certa volatilidade e retorno médio esperado.
- É permitida a venda a descoberto do ativo subjacente, que é uma prática financeira que consiste na venda de um ativo ou derivativo que se possui, esperando que seu preço caia para então comprá-lo de volta e lucrar na transação com a diferença de preços.

- Não existem custos de transação ou impostos, e o valor investido do subjacente pode ser de qualquer tamanho contínuo (os valores dos contratos não são necessariamente inteiros).
- Não há dividendos durante o ciclo de vida da opção.
- Não há oportunidades de arbitragem sem risco.
- A negociação do ativo subjacente é contínua.
- A taxa livre de risco é constante durante o ciclo de vida da opção.

São definidos como parâmetros o preço da ação (S), retorno esperado ao preço da ação (μ), a volatilidade do preço da ação (σ), o preço da opção de compra (f), ao longo de um tempo geral (t) até a sua maturidade (T), sendo o Processo de Wiener definido por (z), e a taxa de juros livre de risco (r). O preço da ação pode ser descrito através da seguinte equação:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

A partir do lema de Itô, que é proveniente do cálculo estocástico e generaliza o Processo de Wiener, podemos diferenciar variáveis em funções dependentes do tempo. Então, se S depende do tempo podemos escrever uma função $f(S)$ o que permite a operação diferencial $df(S)$, logo podemos saber o que acontece com a variável f quando temos variações na variável S . O preço de opção de compra ou de qualquer outro derivativo dependente é modelado como a seguinte equação diferencial parcial:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Com a construção de um portfólio livre de risco, pois uma das premissas do modelo é que não há arbitragem, temos a fórmula final da equação diferencial parcial proposta por Black-Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

A solução desse tipo de equação depende das condições de contorno associadas ao derivativo em questão, ou seja, especificam os valores do derivativo nos limites dos valores possíveis em S e t . Por exemplo, no caso de uma opção de compra europeia, a condição de limite é dada por:

$$f = \max(S - K; 0) \text{ quando } t = T$$

Sendo K o preço de strike da opção.

Uma das formas de se obter a solução da equação diferencial é adotar uma avaliação *risk-neutral*, resultando em um retorno esperado sobre os ativos igual a taxa de juros livre de risco. Esse método simplifica consideravelmente a análise de derivativos. Os passos para esta solução são os seguintes: 1) Pressupor que o retorno esperado é igual a taxa de juros ($\mu = r$); 2) Calcular o desconto esperado do derivativo; 3) Descontar o resultado esperado pela taxa de juros livre de riscos.

A solução amplamente utilizada da equação diferencial de Black-Scholes é para os preços das opções de compra (c) e venda (p) do tipo europeias, que são dadas por:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Sendo d_1 e d_2 :

$$d_1 = \frac{\ln\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

O único parâmetro das fórmulas de apreçamento de Black–Scholes que não pode ser observado diretamente é a volatilidade do preço da ação. A volatilidade é uma medida da amplitude e velocidade da variação do preço de um ativo financeiro. Representa um parâmetro de instabilidade e incerteza no mercado. Quanto maior a volatilidade menor é a certeza dos operadores de mercado quanto ao valor real do ativo. Isso faz com que a volatilidade também esteja associada ao risco de uma operação futura ser bem-sucedida ou não.

Em períodos de crise, se traduz em dados carregados de alta volatilidade. Analogamente, um cenário econômico sob total controle e períodos de baixa liquidez conduzem a uma negociação amena, promovendo assim a baixa volatilidade. Fora destas situações extremas, prevalecem as condições normais de mercado e se faz presente a volatilidade esperada a longo prazo.

A volatilidade realizada (histórica) é calculada pelo passado do ativo estudado em um determinado tempo considerado. Pode-se utilizar o cálculo log-normal das distribuições dos preços para se calcular o retorno percentual ao período do ativo. Normalmente é utilizado o preço de fechamento do ativo no cálculo, conhecido como modelo clássico, apesar de que muitos operadores podem optar pelo preço do horário mais líquido daquele ativo ou por modelos mais complexos que consideram além do preço de fechamento, o preço de abertura, máximo e mínimo diários, que são conhecidos como modelos de séries temporais.

Por outro lado, podemos obter a volatilidade pelo caminho inverso (pouco convencional), chamado de volatilidade implícita, que consiste basicamente em inverter o modelo de Black-Scholes a partir dos valores dos derivativos e assim obter uma estimativa da volatilidade, neste caso, o valor dos derivativos é aproveitado, mas a dinâmica da movimentação dos preços - histórico do ativo - é ignorado.

Procurando testar empiricamente o próprio modelo, Black e Scholes, verificaram que a utilização da variância estimada por meio de dados passados pode causar a superavaliação das opções sobre as ações muito voláteis e a subavaliação das opções sobre as ações pouco voláteis. De acordo com os autores, estimando-se a variância da ação por meio de dados históricos, que compreendam somente o período de vida da opção, obtém-se uma redução desse viés.

Estudos empíricos têm sido realizados para avaliar a aplicabilidade dos modelos de precificação de opções no Brasil como ferramentas de auxílio ao gerenciamento de risco. A

maioria deles testa a aplicação do modelo de Black e Scholes ou o utiliza para fazer comparações com outros modelos, como pode ser encontrado em Lorenzetti e Leismann (2017) para modelos de hedge na área agrícola; enquanto em Ribeiro (2018) comparou o modelo a partir de opções americanas utilizando modelos computacionais baseados em árvores binomiais e simulações de Monte Carlo; Cunha (2020) estuda diversos métodos de volatilidade com diferentes cenários (filtros).

2.3 Modelo Atuarial de Rydberg e Bladt

A atuária é um campo de aplicação da matemática que usa modelos para estimar e analisar cenários de riscos futuros, com isso foram desenvolvidos métodos para resolução de problemas em diferentes segmentos, principalmente na área de seguros. Uma opção de compra funciona de forma equivalente a contratação de um seguro. O comprador da opção (análogo ao segurado) paga uma quantia pré-determinada (prêmio) a fim de obter um ganho potencial futuro. A opção de venda equivale a uma seguradora que recebe o prêmio arcando com o risco. Rydberg e Bladt (1998) propuseram precificação de opções onde transformaram o problema de precificação de opções equivalente a determinar o prêmio justo em um seguro.

Essa abordagem alternativa decorre sobre o fato de que as opções podem ser interpretadas como equivalentes a contratos de seguro de perda em posições compradas ou vendidas, com isso conseguimos derivar seu preço justo de prêmio, exatamente da mesma forma que os contratos de seguro em matemática atuarial.

O princípio de precificação de contratos de seguro em matemática atuarial consiste na seguinte ideia: O valor médio das saídas da seguradora para o cliente em decorrência da ocorrência dos eventos a serem segurados, descontado a valor presente, deve ser igual à soma das entradas na empresa do cliente, descontadas a valor presente. Isso requer um modelo para estimar as probabilidades dos eventos segurados e, assim, derivar o valor médio das saídas da empresa para o cliente. No caso das opções, este modelo é o modelo das variações de preço do ativo subjacente.

Nesse modelo os pesquisadores utilizaram essa abordagem para precificação de uma opção do tipo europeia desconsiderando fatores econômicos, e sim com considerações probabilísticas e atuariais. O ponto central é que a taxa de desconto dos preços futuros está de acordo com a taxa de juros livre de risco e os preços são estocásticos e estão de acordo com a taxa de retorno esperada. Com esses preços e com desconto, podemos calcular o preço de uma opção de compra como o valor esperado da diferença entre o preço real e o preço de exercício (em valores presentes) no momento do exercício. A seguir deduziremos uma fórmula geral, sendo esta um caso especial das fórmulas de Black-Scholes.

Consideramos uma ação com taxa livre de riscos (r), ela segue um processo estocástico em seu preço (em um determinado instante de tempo (t) até a sua maturidade em T sendo o preço da ação no instante 0, com o preço de strike dado por (K), retorno esperado ao preço da ação (μ), a volatilidade do preço da ação (σ). Pela fórmula de Black-Scholes podemos calcular o preço de uma opção de compra do tipo europeia a partir da seguinte fórmula:

$$C(K, T) = S_0 P\left(S_T > Ke^{\mu-r-\sigma^2}T\right) - Ke^{-rT} P\left(S_t > Ke^{(\mu-r)T}\right) \quad (1)$$

onde P é a medida de distribuição de S .

Podemos transformar o problema de precificação de opções em um problema de precificação de um seguro. Suponhamos que temos um portfólio de opções que são independentes e distribuídas de forma idêntica, e consideramos uma opção como uma perda potencial (quando exercida) do ponto de vista do emissor. Se pudéssemos fazer um seguro contra essa perda usando um prêmio justo, então esse prêmio é o mesmo que o valor ou preço da opção de compra. Logo podemos definir a seguinte relação:

$$e^{\mu T} = \frac{ES_T}{S_0} \quad (2)$$

Isso significa que o prêmio para segurar a perda potencial, causada pelo exercício de uma opção, é dado conforme a perda esperada quando trazidas a valores presentes. Juntando as equações (1) e (2) temos:

$$C(K, T) = E\left((e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} K) | (e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} K)\right) S_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right)$$

De maneira similar ao modelo de Black-Scholes o preço de uma opção de compra (c) e venda (p) do tipo europeia utilizando este método é dada por:

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Sendo d_1 e d_2 :

$$d_1 = \frac{\ln\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad d_2 = \frac{\ln\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Um ponto a se ressaltar é que o retorno esperado médio (é substituído pela taxa livre de riscos (r) na fórmula do modelo de Black-Scholes).

A principal vantagem do presente modelo sugerido é que o preço justo da opção final depende e inclui a tendência do ativo subjacente. No modelo Black-Scholes, o preço justo da opção é independente da tendência do ativo subjacente, e a única maneira de os formadores de mercado incluí-lo no cálculo de um preço justo é usar diferentes volatilidades do ativo subjacente para diferentes preços de exercício.

Trabalhos como de Konstantinos et al. (2005) utilizaram índices da bolsa de valores grega para comparação de modelos, enquanto Liu et al. (2013) discutiram através de análises numéricas a comparação entre os modelos utilizando informações do mercado de ações chinês, enquanto Jing e Kohmura (2012) estudaram os preços de ações do *Construction Bank* na bolsa de valores de Hong Kong.

3. Procedimentos Metodológicos

Nesse trabalho foram utilizadas ações de empresas listadas na bolsa de valores brasileira. Inicialmente é feito a construção de um banco de dados com os dados referentes as ações, taxa de juros, opções; posteriormente é realizado uma simulação com os dados reais que precificam opções utilizando o modelo de Black-Scholes e Atuarial. Depois é feito uma comparação dos valores das variáveis do modelo de Black-Scholes com os valores das opções de compra e venda praticados no mercado. Em seguida, é feito o mesmo procedimento com o modelo Atuarial. E por fim, são feitas análises comparativas os valores gerados via os dois modelos.

3.1 Amostra

A amostra engloba dados das companhias de capital aberto da bolsa de valores brasileira (B3) para ações e opções do tipo europeia. Os dados das ações correspondem ao período entre 2017 e 2021 da plataforma on-line *yahoo.com*, os dados de taxas de juros a partir da série histórica do Banco Central Brasileiro e os dados referentes as opções de compra e venda, a partir do serviço de séries históricas de posições em aberto de opções financeiras do site da B3, correspondente ao ano de 2021. Esses dados foram tratados com auxílio da linguagem de programação R e seus respectivos pacotes, além do seu respectivo ambiente de desenvolvimento integrado RStudio. As empresas escolhidas para a análise dos modelos comparados foram a séries históricas da Petrobrás (PETR4), Magazine Luiza (MGLU3), Bradesco (BBDC4), Cielo (CIEL3) e Ambev (ABEV3), estas têm diferentes níveis de negociação e preços no mercado, englobando diferentes segmentos da economia. Além disso, foi incluída a série o Ibovespa (IBOV) como índice de referência, que é um importante indicador do desempenho médio das ações.

Para as séries de opções de compra e venda procurou-se trabalhar com uma série próxima a data de elaboração deste trabalho, buscando medir desta maneira como o mercado se comporta neste dado momento. Trabalhar com séries mais antigas poderia levar a uma conclusão que poderia não ser mais a realidade na data de conclusão deste trabalho. Nas análises foram utilizadas o preço fechamento ajustado (*Adjusted close*), que indica o último valor atribuído a ação em um determinado dia. As opções escolhidas para cada empresa, foram as que apresentaram o maior volume médio de negócios no período escolhido.

3.2 Variáveis

Segundo o modelo de Black-Scholes as variáveis que afetam o preço das opções são o preço do ativo subjacente (S), o preço de exercício (K), a volatilidade do preço do ativo (σ), o tempo de vencimento da opção que é dado pelo tempo de vencimento (T) menos o instante de tempo t onde se encontra a opção, e a taxa de juros livre de risco (r). No caso do modelo atuarial temos como variável diferente do modelo padrão, o uso do retorno médio esperado do preço da ação (μ).

3.2.1 Taxa Livre de Riscos

Para a taxa livre de risco (r) foi utilizado a taxa básica de juros Selic (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia), respectiva ao início de cada opção. Em 10 de outubro de 2021 se encontrava em 6,25% a.a., porém ao longo do ano de 2021 tivemos mudanças nessa taxa que foram acompanhadas durante a construção do banco de dados.

3.2.2 Retorno Médio

Para o retorno médio anualizado (período de 252 dias úteis) da opção foi utilizada as seguintes relações, a partir dos preços das ações:

$$r_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

$$R_t = \sum_{i=0}^{t-1} r_t$$

Onde P_t representa o preço da ação no instante t ; r_t é o log-retorno no instante t , e R_t é o log-retorno médio.

3.2.3 Volatilidade

Para a volatilidade realizada (histórica) foi utilizado a partir do log-retorno das ações-objetos:

$$\sigma_t = \sqrt{252} * \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{R_t - \bar{R}_t}{n-1}}$$

Onde t é o número de dias (base de dias úteis), R_t é o log-retorno no dia t . Por exemplo $\sigma_t=252$ representa a volatilidade histórica, utilizando o período de 252 dias úteis passados (1 ano), a partir da data t .

Tabela 1 – Informações obtidas a partir do conjunto de dados das ações

Ação	Retorno Médio a.a (%)	Volatilidade a.a (%)
IBOV	-0.0489	27,84
PETR4	-0,0400	53,59
MGLU3	-0,2209	60,41
CIEL3	0,0893	43,25
ABEV3	-0,0079	27,71
BBDC4	-0,0381	37,65

3.2.3 Opções escolhidas para a precificação

Para o período de observação foram escolhidas opções com vencimento em outubro – letras J (compra) e V (venda) – ambas com os mesmos preços de exercício. Foram escolhidas as opções com o maior número de negócios no período. As opções desta série, para comparação entre os modelos de precificação, os preços de exercício são os mesmos tanto

para *calls* e *puts*. A data de início (ano-mês-dia) e fim as negociações, além do número de observações, são fornecidas primeiro para a *call* e separadas com barra para a *put*.

Tabela 2 – Dados das opções do tipo europeia escolhidas

Ação Objeto	Código da Opção	Preço de Exercício (K) - R\$	Início	Fim	Número de observações
IBOV	IBOV(J/V)120	120.000	2021-04-12/2021-02-09	2021-10-13/2021-1-10-13	50/67
PETR3	PETR(J/V)316	30,10	2021-08-17/2021-08-19	2021-10-15/2021-1-10-15	42/35
MGLU3	MGLU(J/V)200	19,97	2021-08-18/2021-07-15	2021-10-15/2021-1-10-15	39/61
CIEL3	CIEL(J/V)371	3,71	2021-07-22/2021-07-19	2021-10-15/2021-1-10-15	11/9
ABEV3	ABEV3(J/V)172	17,25	2021-07-19/2021-08-02	2021-10-15/2021-1-10-15	61/45
BBDC4	BBDC(J/V)254	22,60	2021-09-02/2021-1-09-02	2021-10-15/2021-21-10-15	21/21

Dessa forma, além de verificar como os modelos cobrem o preço ao longo do tempo, foi incluído na análise um filtro *moneyness* – se a opção está em ATM, ITM ou OTM. Além disso, temos uma análise a partir de diferentes instantes de tempo; as figuras a seguir exemplificam os dados de análise a partir do índice IBOV que podem ser replicadas para as outras ações:

Figura 1 - Exemplo de relação entre preço da opção de compra e o preço do ativo objeto (IBOVJ)

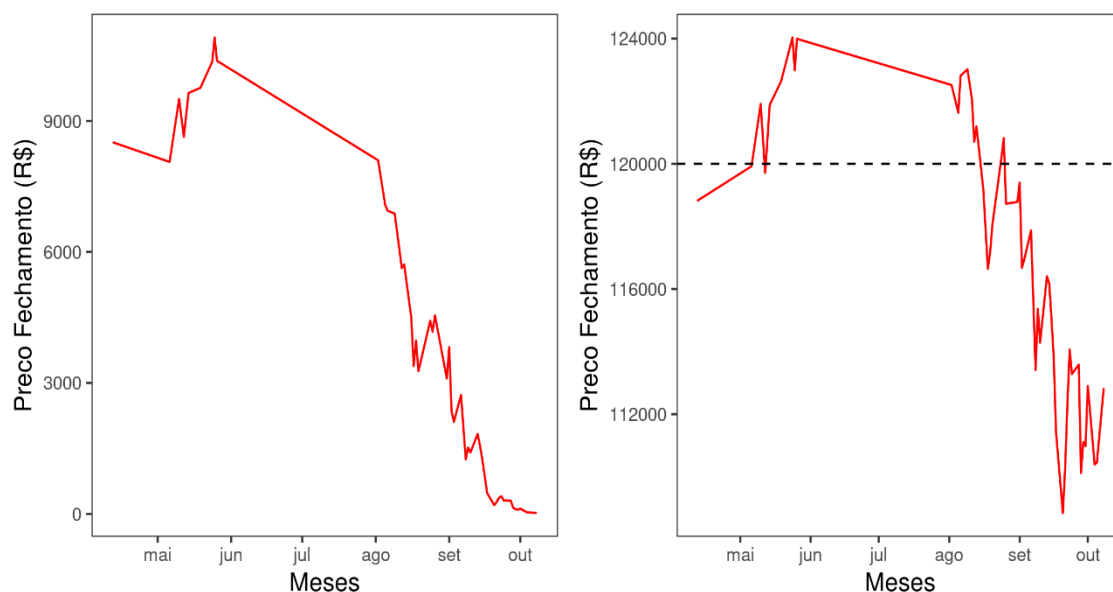
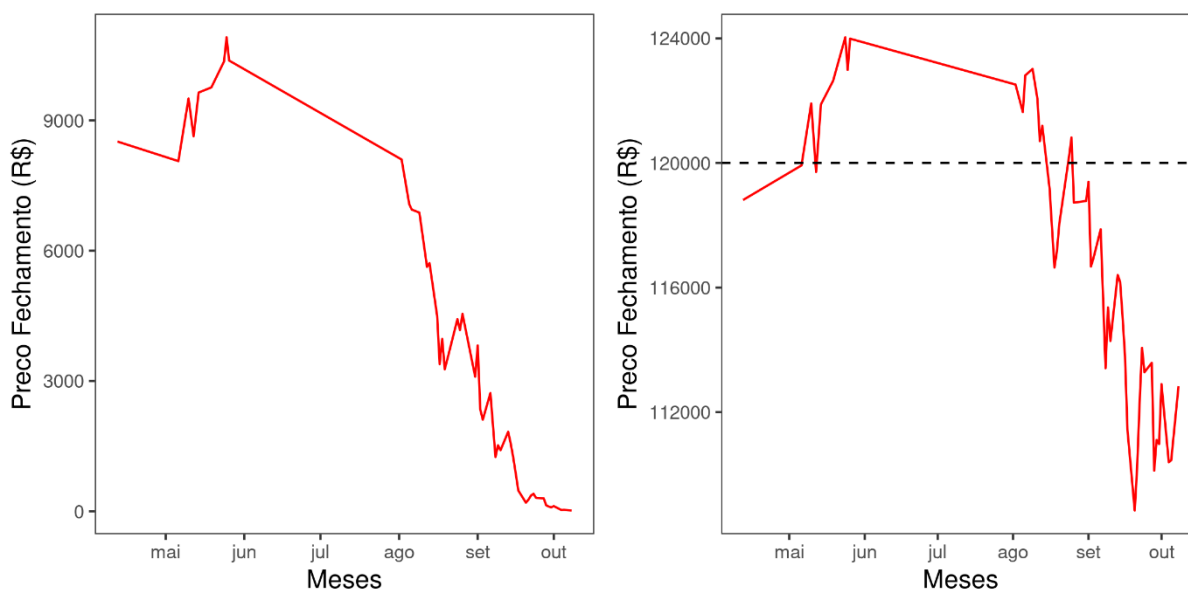


Figura 2 - Exemplo de relação entre preço da opção de venda e o preço do ativo objeto (IBOVV)



Nas figuras 1 e 2 temos a esquerda, a evolução no preço de fechamento da opção IBOVJ(V)120 no decorrer do tempo de 12 de abril de 2021 a 15 de outubro de 2021, e a direita temos a evolução no preço da ação IBOV para o mesmo período, em tracejado o preço de strike da opção.

3.3 Métricas de comparação

Para comparar o valor da opção de compra e venda estimados por cada método, serão utilizados quatro métricas para comparar o valor estimado dos modelos e o valor praticado no mercado. Entre as medidas de erro estão o erro quadrático médio (MSE), a raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio (MAE) e o erro absoluto médio percentual (MAPE). Essas medidas conforme os são valores menores significam que o valor

predito é mais próximo do valor verdadeiro, dependem também da grandeza de comparação das variáveis. A seguir a descrição de cada uma das métricas.

O erro quadrático médio, MSE (*Mean Squared Error*), é geralmente usado para verificar a precisão dos modelos e dá um maior peso aos maiores erros, já que, ao ser calculado, cada erro é elevado ao quadrado individualmente e, após isso, a média desses erros quadráticos é calculada.

$$MSE = \frac{1}{n} * \sum_{t=1}^n (P_t - \bar{P}_t)^2$$

A raiz quadrada do erro médio, RMSE (*Root Mean Squared Error*), é a raiz quadrada do MSE, onde o erro retorna à unidade de medida do modelo (no MSE, a unidade de medida é quadrática). É frequentemente usada em séries temporais por ser mais sensível a erros maiores.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} * \sum_{t=1}^n (P_t - \bar{P}_t)^2}$$

O erro médio absoluto, MAE (*Mean Absolute Error*), é calculado a partir da média dos erros absolutos, utilizamos o módulo de cada erro para evitar a subestimação, isso porque, o valor é menos afetado por outliers.

$$MAE = \frac{1}{n} * \sum_{t=1}^n |P_t - \bar{P}_t|$$

O erro absoluto médio percentual, MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*); o erro é medido como uma porcentagem e assim, é possível fazer comparações entre erros percentuais do modelo entre produtos.

$$MAPE = \frac{100}{n} * \frac{\sum_{t=1}^n |P_t - \bar{P}_t|}{P_t}$$

Nas fórmulas anteriores, P_t é o valor da call/put praticado no mercado de opções no tempo t , $\bar{P}_t$ é o valor da call/put predito do modelo e n é o número de observações disponíveis.

3.4 Filtro *moneyness*

Como explicitado na fundamentação teórica o *moneyness* refere-se as relações entre o preço de exercício e o preço do ativo objeto. Uma forma para se determinar se uma opção está em ATM, ITM ou OTM é a partir das medidas de sensibilidade, também conhecidas por letras gregas. A principal forma de classificação é a partir do delta (Δ) da opção, que mede o quanto a opção varia quando há uma mudança no preço do ativo subjacente. Hull (2006) demonstra que o delta pode ser obtido a partir das equações de Black-Scholes onde para call temos $\Delta = N(d1)$ e para put $\Delta = N(d1) - 1$.

O delta de uma opção de compra varia de zero até um, sendo que opções ITM possuem maiores deltas e opções OTM possuem menores deltas. Normalmente o mercado classifica opções ATM como aquelas que possuem delta mais próximo a 0,5. Para opções de compra isso acontece de forma inversa. A tabela a seguir adota os seguintes valores de delta como filtro.

Tabela 3 – Moneyness a partir do Delta

Call	Put	Moneyness
$\Delta < 0,45$	$\Delta > -0,45$	OTM
$0,45 \leq \Delta \leq 0,55$	$-0,45 \geq \Delta \geq -0,55$	ATM
$\Delta > 0,55$	$\Delta < -0,55$	ITM

4. Resultados e discussões

Esta parte tem por objetivo validar o modelo desenvolvido anteriormente ao verificar a coerência e acurácia dos resultados por ele gerados, bem como avaliar sua aplicação em situações reais de mercado.

4.1 Comparação numérica entre os modelos de Black-Scholes e Atuarial

Esta seção fornece alguns resultados da simulação numérica e serve para ilustrar como os dois modelos determinam o preço das opções de compra europeias e compara os resultados dos preços das opções obtidos nos dois modelos. A precificação das opções é realizada com base em uma série de registros diários de preços de ações de fechamento de dias anteriores.

Usando os preços de fechamento diários anteriores das ações, estimamos o retorno de investimento esperado e a volatilidade da amostra. Estudamos a aplicabilidade desses modelos aos preços de opções de mercado. As figuras 3 e 4 ilustram as comparações do modelo com o preço real.

Figura 3 – Exemplo de comparação de call com os diferentes modelos e o preço real para o Ibovespa (IBOV)

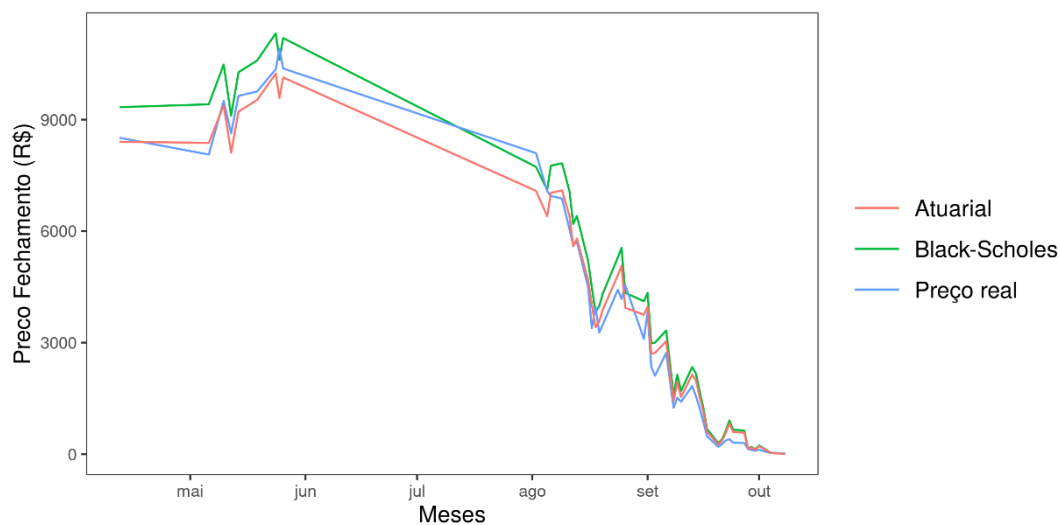
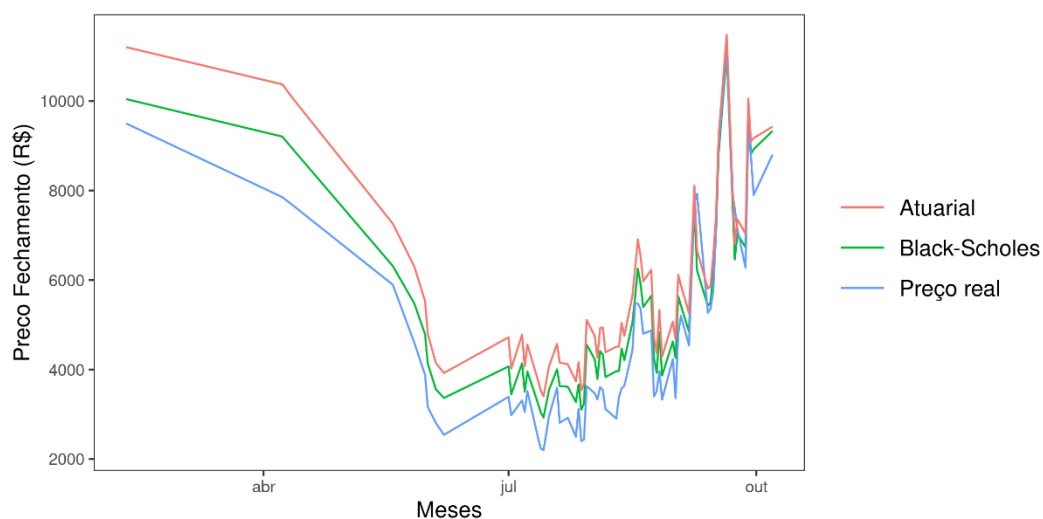


Figura 4 – Exemplo de comparação de put com os diferentes modelos e o preço real para o Ibovespa (IBOV)



A seguir temos uma tabela com as métricas de comparação dos modelos em separado, Tabelas 3 e 4; e nas Tabelas 5 e 6 com filtro moneyness, excluindo o índice IBOV que serve como referência.

Tabela 4 – Métricas de comparação para opções *call*

Modelo	IBOV				PETR			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Sc holes	414297.8 9	643.66	532.16	0.3218	0.2503	0.5003	0.4433	2.3434
Atuarial	171415.7 9	414.02	312.49	0.2286	0.2376	0.4874	0.4416	2.4262

	MGLU				CIEL			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Scholes	0.09254	0.30420	0.22406	0.67851	0.00262	0.05116	0.04983	0.23892
Atuarial	0.06165	0.24830	0.18325	0.59751	0.00338	0.05813	0.05701	0.27326

	ABEV				BBDC			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Scholes	0.0128	0.1131	0.0945	0.3090	0.0166	0.1288	0.1057	0.3039
Atuarial	0.0381	0.1952	0.1705	0.5203	0.0060	0.0774	0.0598	0.2264

Tabela 5 – Métricas de comparação para opções *put*

Modelo	IBOV				PETR			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Scholes	502158.19	708.63	626.71	0.1638	0.29605	0.54411	0.47772	0.17683
Atuarial	1442774.12	1201.16	1115.02	0.2902	0.40755	0.63839	0.57033	0.20854

	MGLU				CIEL			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Scholes	0.1378	0.3712	0.3147	0.2520	0.00654	0.08089	0.06698	0.20454
Atuarial	0.3901	0.6246	0.5522	0.4612	0.00918	0.09583	0.08434	0.25221

	ABEV				BBDC			
	MSE	RMSE	MAE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MAPE
Black-Scholes	0.2961	0.5441	0.4777	0.1768	0.03984	0.19961	0.18225	0.11272
Atuarial	0.4075	0.6384	0.5703	0.2085	0.07506	0.27397	0.26120	0.16003

Tabela 6 – Métricas de comparação para opções call com filtro moneyness

Filtro	Modelo	Métrica			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE
ATM	Black-Scholes	0.113	0.336	0.266	0.347

	Atuarial	0.096	0.309	0.269	0.348
OTM	Black-Scholes	0.078	0.279	0.182	1.154
	Atuarial	0.066	0.256	0.170	1.084
ITM	Black-Scholes	0.015	0.123	0.111	0.104
	Atuarial	0.037	0.194	0.187	0.175

Tabela 7 – Métricas de comparação para opções put com filtro moneyness

Filtro	Modelo	Métrica			
		MSE	RMSE	MAE	MAPE
ATM	Black-Scholes	0.1603	0.4004	0.3177	0.3445
	Atuarial	0.2263	0.4757	0.3670	0.2628
OTM	Black-Scholes	0.0673	0.2594	0.1763	0.2411
	Atuarial	0.5758	0.7588	0.6908	0.8212
ITM	Black-Scholes	0.1417	0.3764	0.2860	0.1647
	Atuarial	0.1662	0.4077	0.3090	0.1494

A partir da análise das tabelas anteriores e dos resultados obtidos dos preços dos modelos, podemos observar que para *calls* as métricas o modelo Atuarial se ajusta melhor aos preços observados no mercado; também incluindo o filtro *moneyness*, onde o modelo de Black-Scholes se ajusta melhor apenas no caso ITM. Isso pode ser devido ao modelo Atuarial acompanhar a tendência do retorno médio ao precificar a opção.

No caso das opções put ocorre o oposto onde o modelo de Black-Scholes se ajusta melhor, tanto para as opções em geral, quanto com o filtro *moneyness*. Um ponto a se ressaltar é em relação ao tempo de maturidade da opção, quanto mais distante do exercício maiores as diferenças nos preços observados nos dois modelos, entretanto isso diminui ao longo do tempo; onde os preços das opções dos dois modelos se aproximam e as métricas estão em valores similares (aproximadamente 90 dias antes da expiração).

O uso de diferentes opções com variações em volume de negociação e no número de observações se diferenciam em relação a acurácia dos modelos, porém a tendência de comparação se repete.

5. Conclusões e Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo comparar os modelos de Black-Scholes e Atuarial, e como eles se ajustam ao preço real das opções de compra e venda com dados de ações da bolsa brasileira. E apresentar a adoção de uma ideia da área atuarial no campo das finanças e como esses dois campos de estudo podem se comunicar. O estudo foi realizado tendo como foco um conjunto de empresas brasileiras, pois há diferenças no comportamento dos ativos se comparados ao mercado internacional, o que pode diferenciar na forma de precificação.

Pelos resultados obtidos mostramos que o modelo Atuarial se ajusta melhor para calls enquanto o modelo Black-Scholes para *puts*; porém à medida que o tempo passa os dois modelos se comportam de forma parecida. Um ajuste com filtro temporal poderia oferecer uma análise mais precisa sobre as diferenças entre os modelos.

Ressalta-se que este trabalho apresenta como limitações alguns fatores que podem afetar no modelo de precificação como na adoção dos parâmetros. Por exemplo, pode-se considerar que a taxa de juros livre de risco seja estocástica, ao invés de fixa, para que a distância entre os preços dos modelos e os preços de mercado sejam menores. Além disso, optou-se por um conjunto de opções europeias para avaliar a tendência dos modelos para diferentes cenários; em casos mais específicos pode-se adotar outras premissas como opções americanas e diferentes datas de exercício.

Como sugestão para pesquisas futuras estão testes com modelos de volatilidade de séries temporais autorregressivos; adotar filtros com diferentes tempos de maturidade; podemos comparar com modelos comumente utilizados no mercado financeiro como simulações de Monte Carlo e árvores binomiais; também pode-se adotar um estudo mais profundo de uma opção em específico e não a um conjunto de empresas como feitas no trabalho.

Conclui-se que este trabalho possa chamar a atenção para o fato de que diferentes modelos de precificação de opções possam ser testados empiricamente no mercado brasileiro e que uma área como a atuária possa auxiliar no desenvolvimento de ideias complementares na área de finanças; e que os resultados possam ajudar na parte teórica e prática de novos modelos adaptados à realidade brasileira.

Referências

- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate. Chicago Journal, 81(3), 637–654.
- Conselho Nacional de Seguros Privados -RESOLUÇÃO CNSP No 321, DE 2015. (n.d.). Acesso em novembro 7, 2021, de <https://www2.susep.gov.br/safe/scripts/bnweb/bnmapi.exe?router=upload/14294>
- Cunha, A.R. S (2020). Modelagem de volatilidade no mercado de opções. 2020. viii, 94 f. Dissertação Mestrado em Estatística - Universidade de Brasília.
- Duan, J. -C. (1995). the Garch Option Pricing Model. Mathematical Finance, 5(1), 13–32. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.1995.tb00099.x>

Hull, J. C. (2006). Options, futures, and other derivatives (6. ed., Pe). Pearson Prentice Hall. http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+563580607&sourceid=fbw_bibsonomy

Jing, H., & Kohmura, T. (2012). Applicability of Actuarial Method to Option Pricing.

Konstantinos, K., Dr, N., & Antoniadis. (2005). Option pricing based on the concept of insurance: market models-free methods that give as special case the Black-Scholes option pricing. *Review of Economic Sciences*, 8, 177–190.

Liu, J., Yan, L., & Ma, C. (2013). Pricing Options and Convertible Bonds Based on an Actuarial Approach. 2013.

Lorenzetti, F. B., & LEISMANN, E. L. (2017). Gerenciamento De Risco De Preço Da Soja: Comparação Entre Mercados Futuros E Opções Na Bm & Fbovespa Como Alternativa De Hedge No Período De Janeiro a maio De 2017. *Conferência Internacional Em Gestão de Negócios II - Unioeste*, 1–16.

Opções sobre Ações | B3. (n.d.). Acesso em novembro 7, 2021, de https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/opcoes-sobre-acoes.htm

Ribeiro, L. V. dos S. (2018). Modelos de precificação de Opções Americanas a partir de plataformas paralelas [Universidade de São Paulo]. <https://doi.org/10.11606/D.55.2018.tde-05022018-103941>

Ross, S. A., Rubinstein, M., & Cox, J. C. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.

Rydberg, T. H., & Bladt, M. (1998). An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22, 65–73.